طرح پیشنهادی برای رساله دکتری

موسی مولوی
دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شهرکرد

معرفی طرح و تاریخچه.

معرفی ضربگر شور توسط شور [۱] ، در سال ۱۹۰۴؛
معرفی پوشش گروهی توسط شورو خواص آن ؛
جونز [۲] و وایگلد [۳] در ۱۹۷۴ مطالعه درباره توانهای امn ضربگر شور و نامساوی هایی درباره آن؛
معرفی ضربگر شور برای زوج گروهها و بررسی خواص آن تسط الیس [۴] ۱۹۹۸؛
تعمیم مفهوم ضربگر شور برای جبرهای لی و زوج جبرهای لی توسط بوسکو [۵] ، باتن [۶] ، استیتزینگر [۷] و مانی هان [۸] ؛
. ارائه مفهوم دیگری برای جبرهای لی، مشابه ضربگر شور، به نام $c-$ امین ضربگر پوچ توان تعریف شده است. این طرح به دنبال ارائه تعمیم‌های بیشتری در همین راستا می باشد.

[۱] I. Schur
[۲] M. R. Jonse
[۳] J. Wiegold
[۴] G. Ellis
[۵] L. R. Bosko
[۶] P. Batten
[۷] E. Stitzinger
[۸] K. Moneyhun

یکی از ساده ترین تعریف‌های ضربگر شور برای یک گروه متناهی Gعبارتست از

$$\mathcal{M}(G) \cong \frac{R \cap [F,F]}{[R,F]},$$

که در آن $G \cong \frac{F}{R}$ ، یک نمایش آزاد G می‌باشد که توسط هوپف [۹] ، در [۶] بیان و ثابت شده است.
منظور از یک زوج گروه (G,N) عبارتست از یک گروه G به همراه زیرگروه نرمال N از آن. مفهوم ضربگر شور توسط الیس در [۵] به زوج گروه‌ها تعمیم داده شد. الیس ضربگر شور زوج (G,N) را با $\mathcal{M}(G,N)$ نشان داد و خواصی از آن را بررسی نمود از جمله این که با فرض $N \cong \frac{S}{R}$ که در آن S زیرگروه نرمالی از F می باشد، داریم

$$\mathcal{M}(G,N) = \frac{R \cap [S,F]}{[R,F]}.$$

او همچنین نشان داد

$$\mathcal{M}(G,N) \cong ker(\mu : \mathcal{M}(G) \to \mathcal{M}(\frac{G}{N})).$$

محققان دیگری نیز در باره خواص ضربگر شور زوج گروه‌ها مطالعاتی را انجام دادند . رجب‌زاده مقدم [۱۰] و همکاران در [۱۰] شرایطی را برای وجود یک پوشش برای زوج گروه (G,N) بررسی کرده و نشان دادند که توسیع های مرکزی نسبی تصویر همریخت یک پوشش از (G,N) هستند و نامساوی‌هایی برای ضربگر شور زوج گروه (G,N) ارائه نمودند.

[۹] H. Hopf
[۱۰] M. R. Moghadam

فرض کنیم F یک جبر لی آزاد و $\circ \longrightarrow R \longrightarrow F \longrightarrow L \longrightarrow \circ$ یک نمایش آزاد از جبر لی L باشد. برای $c \geq ۱$، $c-$ امین ضربگر پوچ توان جبر لی L را به صورت

$$\mathcal{M}^{(c)}(L) = \frac{R \cap \gamma_{c+۱}(F)}{\gamma_{c+۱}(R,F)},$$

تعریف می کنیم که در آن $\gamma_{c+۱}(F)$ جمله $c+۱$ ام از سری مرکزی پایینی F، $\gamma_۱(R,F) = R$ و

$$\gamma_{c+۱}(R,F) = [\gamma_c(R,F), F]$$

می‌باشد. در حالت $c = ۱$ ، $\mathcal{M}^{(۱)}(L) = \mathcal{M}(L) = \frac{R\cap[F,F]}{[R,F]}$ ، همان ضربگر شور جبرلی L است. به سادگی قابل بررسی است که جبر لی $\mathcal{M}^{(c)}(L)$ آبلی بوده و مستقل از انتخاب نمایش آزاد L می باشد.
ریسمانچیان [۱۱] و ارسخان [۱۲] ،در [۱۳] ، ضمن استفاده از تعریف بالا، نشان داده اند که دنباله زیر یک دنباله دقیق است.

$$\mathcal{M}^{(c)}(L) \longrightarrow \mathcal{M}^{(c)}(\frac{L}{N}) \longrightarrow \frac{N}{\gamma_{c+۱}(N,L)} \longrightarrow \frac{L}{\gamma_{c+۱}(L)} \longrightarrow \frac{L}{\gamma_{c+۱}(L)+N} \longrightarrow \circ$$

آنها همچنین ساختار $c-$ پوشش های جبرهای لی را بررسی نموده و ثابت کرده اند که اگر $c-$ امین ضربگر پوچ توان جبرلی L خاصیت هوفین را دارا باشد، آنگاه توسیع

$$\circ \ \rightarrow \ M \ \rightarrow L^* \ \overset{\psi}{\rightarrow} \ L \ \rightarrow \ \circ$$

، یک $c-$ پوشش L خواهد بود، اگر وتنها اگرایده‌آل S از F وجود داشته باشد به طوری‌که

(i) $L^* \cong \frac{F}{R}, M \cong \frac{R}{S}$؛
(ii) $\frac{R}{\gamma_{c+۱}(R,F)} = \mathcal{M}^{(c)}(L) \oplus \frac{S}{\gamma_{c+۱}(R,F)}$؛

و به عنوان نتیجه ای به دست آورده اند که هر جبرلی متناهی البعد دارای حداقل یک $c-$پوشش جبری می باشد.

[۱۱] M. R. Rismanchian
[۱۲] M. Araskhan

بعد $c-$ امین ضربگر پوچ توان در جبرهای لی متناهی البعد هم مورد توجه محققان قرار گرفته است . سالمکار [۱۳] و همکاران در [۱۱] ثابت کرده اند اگر L یک جبر لی متناهی البعد باشد، آنگاه $\mathcal{M}^{(c)}(L)$ نیز متناهی البعد می باشد و نامساوی زیر را برای $dim(\mathcal{M}^{(c)}(L))$ ارائه نموده اند.

$$dim(\mathcal{M}^{(c)}(L)) \leq dim(\mathcal{M}^{(c)}(\frac{L}{\gamma_m(L)})) + dim(\frac{\gamma_{c+m}(F)}{\gamma_{c+1}(R,F) \cap \gamma_{c+m}(F)})$$

.

ارسخان در [۱] نامساوی دیگری برای بعد $c-$ امین ضربگر پوچ توان یک جبرلی متناهی البعد به دست آورده و کرانهای بالای به دست آمده را با کران بالای سالمکار مقایسه نموده است.

سعیدی [۱۴] و همکاران در [۱۶] بعد ضربگر شور زوج جبرهای لی را مطالعه نموده و کرانهای بالایی برای آن محاسبه نموده اند.

ریسمانچیان و ارسخان در [۱۴] نامساویهایی برای ضربگر شور یک زوج از جبرهای لی متناهی البعد و فاکتور جبر لی آنها به دست آورده اند.

[۱۳] A. R. Salemkar

[۱۴] F. Saeedi

فرض کنیم $\circ \to N \xrightarrow{\sigma} E \xrightarrow{\pi} L \to \circ$ یک توسیع جبرلی و H متمم در E باشد به طوری که

$$\circ \to N \to H \xrightarrow{\bar{\pi}} I \to \circ$$

یک توسیع باشد. ریسمانچیان و ارسخان در [۱۵] ثابت کرده اند که دنباله

$$\mathcal{M}(E,H) \to \mathcal{M}(L,I) \to \frac{N}{[N,I]} \to \frac{H}{[H,E]} \to \frac{I}{[I,L]} \to \circ$$

دقیق است.
فرض کنیم K و N متمم هایی در جبر لی متناهی البعد L باشند به طوری که $K \subseteq N$. آنها همچنین ثابت نموده اند که
الف) جبر لی $\mathcal{M}(L,N)$ نیز متناهی البعد است؛
ب) سه گزاره زیر معادل هستند:

(i) دنباله $\circ \to \mathcal{M}(\frac{L}{K},\frac{N}{K}) \to \frac{K}{[K,L]} \to \frac{N}{[N,L]} \to \frac{N}{[N,L]+K} \to \circ$ دقیق است؛
(ii) $\mathcal{M}(L,K) = \mathcal{M}(L,N)$؛
(iii) $\mathcal{M}(\frac{L}{K},\frac{N}{K}) \cong \frac{K\cap[N,L]}{[K,L]}$.

آن‌ها همچنین قضیه زیر را که مشابه قضیه استالینگز [۱۵] در [۱۷] درباره گروه ها می باشد، بیان و اثبات کرده اند:
فرض کنیم $f : L \longrightarrow H$ یک بروریختی، N متمم پوچ توان در L و K متمم در H باشد به‌طوری‌که $f(N) = K$. اگر $ker f \subseteq [N,L]$ و $\mathcal{M}(H,K)$ بدیهی باشد، آن‌گاه f و $f\mid_N$ یکریخت هستند.

[۱۵] J. Stallings

۴ ـ اهداف اصلی طرح:

۱ ـ بررسی استقلال $c-$ امین ضربگر پوچتوان زوج جبرهای لی از انتخاب نمایش آزاد و تعریف آن به صورت هسته یک همریختی؛

۲ ـ بررسی نامساویها و کرانهایی برای بعد $c-$ امین ضربگر پوچتوان زوج جبرهای لی در حالت بعد متناهی؛

۳ ـ تعمیم دنباله دقیق ۵ جمله ای معروف و استفاده از آن در به دست آوردن یکریختی هایی بین فاکتورهای جبرلی و زوج جبرهای لی؛

۴ ـ تعمیم قضیه استالینگز در گروهها را برای زوج جبرهای لی و $c-$ امین ضربگر شور زوج جبرهای لی بررسی کنیم؛

۵ ـ بررسی ارتباط بین $c-$ امین ضربگر پوچتوان و تعمیم توسیع‌های مرکزی.

فرض کنیم F یک جبر لی آزاد و $0 \longrightarrow R \longrightarrow F \longrightarrow L \longrightarrow 0$ یک نمایش آزاد از جبر لی L باشد. اگر(L,N) یک زوج جبر لی باشد به طوری که $N \cong \frac{S}{R}$ برای $c \geq 1$، $c-$ امین ضربگر پوچ توان زوج جبر(L,N) را به صورت

$$\mathcal{M}^{(c)}(L,N) = \frac{R \cap \gamma_{c+1}(S,F)}{\gamma_{c+1}(R,F)},$$

تعریف می کنیم که در آن $\gamma_{c+1}(F)$ جمله $c+1$ ام از سری مرکزی پایینی F، $\gamma_1(R,F) = R$ و

$$\gamma_{c+1}(R,F) = [\gamma_c(R,F), F]$$

به راحتی می توان نشان داد

$$\mathcal{M}^{(c)}(L,N) = ker(\mu : \mathcal{M}^{(c)}(L) \to \mathcal{M}^{(c)}(\frac{L}{N}))$$

۶ ـ مواد و روش اجرا:

فرض می کنیم (L, N) یک زوج از جبرهای لی باشند. با مطالعه و کنکاش دقیق در کتابهای مرجع ضربگر شور مانند [۹] و جبرهای لی مانند [۴] ، همچنین $c-$ امین ضربگر شور گروه‌ها و پایای بئر گروه‌ها و ضربگر شور زوج گروه‌ها به خصوص مقالات الیس و مقالات دیگری که در این زمینه نوشته شده است، محدودیتها و شرایط لازم را بررسی کرده و سعی می کنیم نتایج جدیدی را به دست آوریم. مثالها و گزاره هایی از مقاله های مختلف مورد کنکاش قرار می دهیم تا در ارائه گزاره ها و نتایج جدید مسیر ما را سهل نماید. تمام نتایجی که به دست می آید با ضربگر شور زوج جبرهای لی مقایسه خواهد شد تا روشن شود چه گسترش ها یا چه تحدیدهایی صورت گرفته است.

مراجع

[1] M. Araskhan, The dimension of the c-nilpotent multiplier, *Journal of Algebra,* **386** (2013) 105-112.

[2] P. Batten, K. Moneyhun and E. Stitzinger, On characterizing nilpotent Lie algebras by their multipliers, *Communications in Algebra,* **24** (1996) 4319-4330.

[3] L. R. Bosko, On Schur multipliers of Lie algebras and groups of maximal class, *International journal algebra computation,* **20** (2010) 807-821.

[4] W. A. DE Graaf, Lie Algebras: Theory and Algorithms, *Elsevier Science B. V press,* 2000.

[5] G. Ellis, The schur multipliers of groups, *Applied categorical structures ,* **6**(3) (1998) 167-172.

[6] H. Hopf, Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe, *Commentani Mathematici Helvetict,* **14** (1942) 257-309.

[7] M. R. Jones , Some inequalities for the multiplicator of a finit group, *Proceedings of the American Mathematical Society,* **39**(3) (1974) 750-456.

[8] M. R. Jones and J. Wiegold, A subgroup theorem for multipliers, *Journal of London Mathematical Society,* **6**(2) (1974) 738.

[9] G. Karpilovsky, The Schur multiplier, *Clarendon press. Oxford* 1987.

[10] M. R. Moghadam, A. R. Salemkar and K. chiti, Some properties on the Schur multiplier of a pair of groups , *Journal of Algebra,* **312** (2007) 1-8.

[11] A. R. Salemkar, B. Edalatzadeh and M . araskhan, Some inequalities for the dimension of the c-nilpotent multiplier of Lie algebras, *Journal of Algebra,* **322** (2009) 1-8.

[12] F. Saeedi, A. R. Salemkar and B. Edalatzadeh, The commutator subalgebra and Schur multiplier of a pair of nilpotent Lie algebra, *Journal of Lie Theory,* **21** (2011) 1575-1585.

[13] M. R. Rismanchian and M. Araskhan, Some properties on the Schur multiplier of a pair of Lie algebras, *Journal of Algebra and its Applications,* **11**(2012) 1250011-1250019

[14] M. R. Rismanchian and M. Araskhan, Some inequalities for the dimension of the Schur multiplier of a pair of (nilpotent) Lie alg *Journal of Algebra,* **352** (2012) 173-179.

[15] M. R. Rismanchian and M. Araskhan, Some properties of the c-nilpotent multiplier and c-covers of Lie algebras, *Algebra Colloquiu* (2014) 421-426.

[16] F. Saeedi, A. R Salemkar and B. Edalatzadeh, The commutator subalgebra and Schure multiplier of a pair of nilpotent Lie algebras, *J of Lie Theory,* **21** (2011) 491-498.

[17] J. Stallings, Homolology and central series of groups, *Journal of Algebra,* **2** (1965) 170-181.